

ДВОИЧНО-ДЕСЕТИЧНА АРИТМЕТИКА В КОД 2421

Димитър Тянев, Зоран Драганов

Резюме: Изследвана е възможността за реализация на десетична аритметика в код 2421. Представен е синтезът на оригинална принципна логическа схема на 2/10-чен суматор. Разгледана е и операция изваждане, за нуждите на която е представена схема за преобразуване на числата в допълнителен код. Дадени са числени примери.

Ключови думи: Цифрова аритметика, BCD-код 2421.

2421-Code Binary-Decimal Arithmetic

Dimitar Tyanev, Zoran Draganov

Abstract: This paper explores the decimal arithmetic implementation presented into 2421 code. Synthesis of BCD adder's original logic scheme is presented. Operation subtraction is considered as well, as scheme for converting numbers into two's complement. There are numeric expels given.

Keywords: Digital Arifmetic, BCD-code 2421, BCD Adderrs.

I. Въведение

Организирането на десетична аритметика в изчислителните системи е неизбежно. Това се постига след подходящо двоично кодиране на десетичните цифри. Предпоставка за оптимална техническа реализация на 2/10-чната аритметика е код, който в максимална степен удовлетворява свойствата на Рутисхаузер [1]. Вниманието на тук представеното изследване е насочено към тегловно значимия код 2421, известен още като код на Емери, който се дефинира със следната кодова таблица:

Таблица 1. Дефиниране на код 2421

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0000	0001	0010	0011	0100	1011	1100	1101	1110	1111

Всички логически комбинации (6 на брой), освен горе избраните, се приемат за забранени. Полезно е тук да бъде отбелязано, че кодовите комбинации за цифрите от първата половина на кодовата таблица (0, 1, 2, 3 и 4), интерпретирани като двоични числа, могат да бъдат изразени така:

$$\langle \text{code} \rangle_i = (d_i + 0)_{(2)} , \quad (1)$$

а кодовите комбинации за цифрите от втората половина на кодовата таблица (5, 6, 7, 8 и 9), интерпретирани като двоични числа, могат да бъдат изразени така:

$$\langle \text{code} \rangle_i = (d_i + 6)_{(2)} . \quad (2)$$

Кодът 2421 притежава свойствата четност, монотонност, тегловна значимост и допълняемост. Единственото свойство, което не притежава, е свойството еднозначност. Това налага разглеждането на останалите 6 възможни двоични комбинации като забранени. Отпадналите (забранените) комбинации са онези, които не изпълняват свойството допълняемост. В светлината на това ограничение обаче може да се приеме, че кодът 2421 е максимално близо до изискванията на Рутисхаузер. Освен това не са известни технически решения за аритметика върху този код, което оправдава вниманието към него.

Реализацията на всяка аритметика се основава върху техническата реализацията на операция събиране, чрез така наречения суматор. Ето защо непосредствената задача тук е синтезът на 2/10-чен суматор в код 2421.

II. Синтез на принципната логическа схема на 2/10-чен суматор в код 2421

Тъй като кодът на десетичните цифри е двоичен, решението се търси въз основа на операция събиране в двоична бройна система, т.е. с помощта на двоичен комбинационен суматор. Като се има предвид още, че десетичната бройна система е позиционна, задачата за събиране на две многоразрядни числа се свежда до задача за синтез на едноразряден 2/10-чен суматор.

И така, вниманието се съсредоточава върху сумата от две кодови комбинации в условията на пренос от по-младшия разряд:

$$\Sigma_i = d_i^{(x)} + d_i^{(y)} + p_{i-1} , \quad (3)$$

където с $d_i^{(x)}$ и $d_i^{(y)}$ са означени десетичните цифри в i -тия разряд на операндите X и Y , а с p_{i-1} е означен преносът от по-младшия разряд.

Като се има предвид, че двуместната операция събиране трябва да се подчинява на комутативния закон, възможните на брой съчетания от две кодови комбинации са:

$$\binom{2}{10} + 10 = 55 .$$

Верността на кодовата сума следва да се анализира от гледна точка на правилата на десетичната бройна система, възможностите на двоичната бройна система и приетата по-горе кодова таблица.

Въпреки, че кодовите комбинации не са двоични числа, при получаване на сумата (3), те се интерпретират като такива, защото единственото техническо средство за операция събиране е двоичният суматор. В смисъла на тази интерпретация, забранените комбинации ще бъдат интерпретирани като двоични числа, както е представено тяхното съответствие в таблица 2.

Таблица 2. Забранени комбинации за код 2421

0101	0110	0111	1000	1001	1010
5	6	7	8	9	10

Следователно, съответствието на кодовата сума на забранена комбинация, може да се изрази формално със следното неравенство:

$$5 \leq \Sigma_i \leq 10 . \quad (4)$$

След направения анализ на получаваните двоични кодови суми (3), в условията на събиране без наличие на пренос, както и при наличие на пренос, се констатира, че не винаги се получава верен резултат (необходим код на сумата $d_i^{(z)}$). Всички възможни суми Σ_i могат да бъдат класифицирани в три групи:

- Суми, които имат вярно съответствие в смисъла на кодовата таблица;
- Суми, които представляват забранени комбинации, но са в сила неравенствата:

$$d_i^{(x)} \leq 4 \text{ и } d_i^{(y)} \leq 4 . \quad (5)$$

- Суми, които представляват забранени комбинации, но са в сила неравенствата:

$$d_i^{(x)} \geq 5 \text{ и } d_i^{(y)} \geq 5 . \quad (6)$$

В случаите, когато получената сума съответства на забранена комбинация, тя трябва да бъде коригирана. Корекцията се търси като двоично число K_i , което след събиране с кодовата сума Σ_i , да даде правилен десетичен код z_i и правилен десетичен пренос p_i . Тъй като случаите с необходимост от корекция са два (втори и трети според горната класификация), то общата корекция K_i се търси като дизюнкция от вида:

$$K_i = K_i^{(b)} \cup K_i^{(c)} . \quad (7)$$

Корекцията $K_i^{(b)}$, която следва да се назначи в условията на случай b), не трябва да генерира тетраден пренос, тъй като десетичната сума по силата на (5), не може да бъде число по-голямо от 9. Тъй като най-голямата по стойност забранена комбинация е 10, то корекцията, определена като число, което при събиране с кодовата сума няма да генерира тетраден пренос, е +6 (т.е. $K_i^{(b)} = 0110_{(2)}$).

В условията на случай c), по силата на таблица 1, кодовата сума Σ_i може да бъде изразена както следва:

$$\Sigma_i = (d_i^{(x)} + 6) + (d_i^{(y)} + 6) + p_{i-1}. \quad (8)$$

Тази сума винаги ще генерира тетраден пренос, който може да се приеме за необходимия десетичен пренос ($p_i \equiv p_3$), така че в текущия разряд остава разликата:

$$R_i = (d_i^{(x)} + d_i^{(y)} + p_{i-1} + 12) - 16. \quad (9)$$

Тази разлика, при условията (6), може да има за минимална стойност числото 6, което според кодовата таблица, трябва да се коригира чрез прибавяне на неизвестна за сега константа, т.е. така:

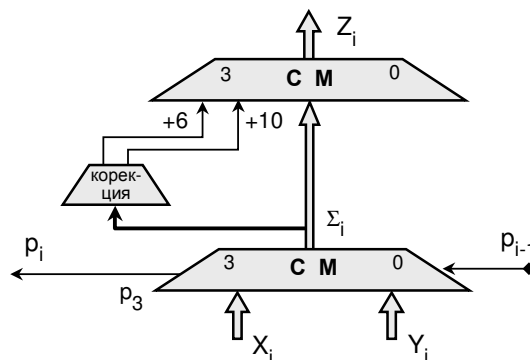
$$(R_i + K_i^{(c)})_{\text{mod}16} = z_i. \quad (10)$$

Като имаме предвид, че комбинацията от минималните цифри, която отговаря на условие (6) е 5+5+0, може да се определи, че корекцията в този случай следва да бъде числото:

$$K_i^{(c)} = 1010_{(2)}. \quad (11)$$

Тъй като необходимият пренос при десетичното събиране в тези случаи според (9) е отчетен още при първото събиране, при второто събиране според (10), възможните тетрадни преноси не следва да се разпространяват.

В резултат на горе изложения анализ се стига до логическата структура, показана на фигура 1:



Фиг. 1 Логическа структура на суматор в код 2421

Единственият, все още неизяснен елемент в получената структура, е схемата за формиране на 2/10-чните корекции. Функциите на корекциите са две и техният аритметически анализ беше изложен по-горе. Логиката на анализа формира три необходими признака:

- Признак за забранена комбинация, който ще бъде означен така: FB (*forbidden*);
- Функция за корекция +6, означена C6;
- Функция за корекция +10, означена C10.

Функциите за корекция зависят от отношенията (5) и (6) съответно, ето защо са необходими две логически функции, които да разпознават тези ситуации. Тези функции са означени така: DC4 за разпознаване на отношенията (5) и DC5 за разпознаване на

отношенията (6). Синтезът им протича върху кодовата таблица 1, на която се гледа като на таблица за истинност за тези отношения. При това положение получаваме, че:

$$\begin{aligned} DC4 &= \overline{x3} \cap \overline{y3} ; \\ DC5 &= x3 \cap y3 . \end{aligned} \quad (12)$$

където с $x3$ и $y3$ са означени най-левите битове в кодовите комбинации на двете десетични цифри.

Функцията FB се синтезира върху таблица 2, на която се гледа като на таблица за истинност. След минимизация тя получава следния вид:

$$FB = (\overline{z3} \cap \overline{z2}) \cap (z1 \cup z0) \cup (z3 \cap \overline{z2}) \cap (\overline{z1} \cup \overline{z0}) . \quad (13)$$

Окончателният вид на коригиращите функции е следният:

$$\begin{aligned} C6 &= FB \cap DC4 ; \\ C10 &= FB \cap DC5 . \end{aligned} \quad (14)$$

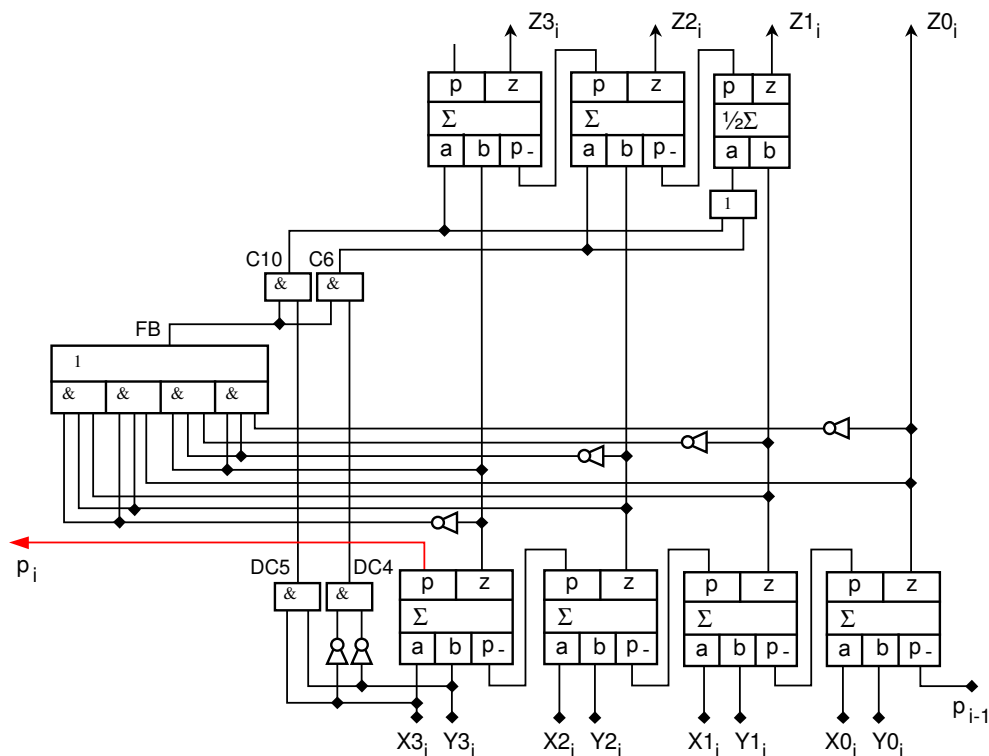
В принципната логическа схема функциите за корекция се превръщат в числени стойности, аналогично на 2/10-чните корекции в други известни суматори [2]. Принципната логическа схема на едноразрядния 2/10-чен суматор е представена на фигура 2.

III. Операция изваждане. Схема за преобразуване в допълнителен код

Същността на операция изваждане е изложена в [1] и нито бройната система, нито кодът, правят изключение, ето защо са в сила приложимостта на допълнителния код и неговите свойства. Тъй като за кодът 2421 свойството допълняемост е изпълнено, то може да бъде използвано следното определение за получаване на допълнителен код:

$$[Z]_{\text{ДК}} = [Z]_{\text{ОК}} + 1 .$$

Според теоремата за събиране в допълнителен код, операциите събиране и изваждане се изпълняват върху допълнителните кодове на числата. Според казаното по-горе, допълнителният код на едно отрицателно число в код 2421 се получава след поразрядно логическо инвертиране, в резултат на което се получава обратният му код, с последващо инкрементиране.



Фиг. 2 Принципна логическа схема на суматора

IV. Примери

Пример 1: Да се изчисли сумата $Z=X+Y$, където $X=3497889$, $Y=1434595$. $Z=4932484$.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccccc}
 0011 & 0100 & 1111 & 1101 & 1110 & 1110 & 1111 & \\
 + & 0001 & 0100 & 0011 & 0100 & 1011 & 1111 & 1011
 \end{array} & = X_{(2421)} \\
 \hline
 \begin{array}{cccccccc}
 0100 & 1001 & 0011 & 0010 & 1010 & 1110 & 1010 & \\
 + & 0000 & 0110 & 0000 & 0000 & 1010 & 0000 & 1010
 \end{array} & = \Sigma \\
 \hline
 \begin{array}{cccccccc}
 0100 & 1111 & 0011 & 0010 & 0100 & 1110 & 0100 & \\
 4 & 9 & 3 & 2 & 4 & 8 & 4 &
 \end{array} & = Z_{(2421)} \\
 & & & & & & & = Z_{(10)}
 \end{array}$$

2/10-чна корекция

Пример 2: Да се изчисли разликата $Z=X-Y$, където $X=3497889$, $Y=1434595$. $Z=2063294$.

В този пример първоначално ще бъде получен допълнителният код на числото $-Y$.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccccc}
 1 & 0001 & 0100 & 0011 & 0100 & 1011 & 1111 & 1011 \\
 \neg & 1 & 1110 & 1011 & 1100 & 1011 & 0100 & 0000
 \end{array} & = -Y_{(2421)} \\
 & & & & & & & 0100 = [-Y]_{ок} \\
 & & & & & & & 0001 = +1 \\
 \hline
 \begin{array}{cccccccc}
 1 & 1110 & 1011 & 1100 & 1011 & 0100 & 0000 & 0101 \\
 + & & & & & & & 0110
 \end{array} & \text{корекция} \\
 \hline
 \begin{array}{cccccccc}
 1 & 1110 & 1011 & 1100 & 1011 & 0100 & 0000 & 1011
 \end{array} & = [-Y]_{дк}
 \end{array}$$

Следва изпълнение на операция събиране в допълнителен код:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccccc}
 0 & 0011 & 0100 & 1111 & 1101 & 1110 & 1110 & 1111 \\
 + & 1 & 1110 & 1011 & 1100 & 1011 & 0100 & 0000
 \end{array} & = [X]_{дк} \\
 \hline
 \begin{array}{cccccccc}
 0 & 0010 & 0000 & 1100 & 1001 & 0010 & 1111 & 1010 \\
 + & 0000 & 0000 & 0000 & 1010 & 0000 & 0000 & 1010
 \end{array} & = [-Y]_{дк} \\
 \hline
 \begin{array}{cccccccc}
 0 & 0010 & 0000 & 1100 & 0011 & 0010 & 1111 & 0100 \\
 2 & 0 & 6 & 3 & 2 & 9 & 4 &
 \end{array} & = Z_{(10)}
 \end{array}$$

2/10-чна корекция

Както се вижда от получените резултати, приложената логика води до верни резултати.

V. Заключение

Имайки за пример 2/10-чните суматори в други кодове [2], и синтезираният тук има аналогичната им структура. Схемата за корекция е малко по-сложна, което се дължи на това, че забранените комбинации се намират в средата на всички кодови комбинации (от 5 до 10). Затова пък схемата генерира тетрадният пренос по възможно най-бързия начин. Основното достоинство на схемата се състои в това, че тя материализира свойствата на кода и позволява пълноценна 2/10-чна аритметика.

Литература

- [1]. Д. С. Тянев, *Организация на компютъра*, том 1, ISBN 978-954-20-0412-7, 2008.
- [2]. Д. С. Тянев, *Организация на компютъра - упражнения*, ISBN 954-20-0258-0, 2007.
- [3]. Steven F. Reith, *Introduction to Number Systems and Logic*, Naval education and training professional development and technology center, 1998.
- [4]. R.Graham, D. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley publishing company, ISBN 0-201-14236-8.
- [5]. Ken Bogart, Cliff Stein, *Discrete Math in Computer Science*, 2002.