РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЕРЕХВАТА ДВИЖУЩЕЙСЯ ЦЕЛИ

Л. Н. Сотиров, Д. С. Тянев

Движение цели по одной из координат, например азимуту, заданно уравнением

$$y^*(t) = c_0 + c_1.t, \quad c_0 = const.; \quad c_1 = const. \tag{1}$$

Требуется поразить (за конечное время) эту движущуюся цель. Для выполнения сформулированной задачи необходимо оптимальным образом управлять снарядом, уравнение движения которого имеет следующий вид:

$$\ddot{y} + \alpha_1.\dot{y} = \beta_0.u \tag{2}$$

где y - управляемая координата;
u - управляющее воздействие;
α_1, β_o - постоянные во времени коэффициенты.

В начальном моменте времени $t = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$.

Учитывая ограниченную мощность рулевой установки, введем следующее ограничение на управляющее воздействие по модулю

$$|u| \le 1. \tag{3}$$

В [1] управляющее воздействие выбрано таким образом, чтобы встреча с целью произошла за минимально возможное время.

В настоящей работе требуется лишь конечность времени поражения цели и применяется совершенно иной подход к решению задачи оптимального перехвата движущейся цели.

Задачу оптимального перехвата переформулируем как задачу перевода изображающей точки на фазовой плоскости с начальным ненулевым состоянием $\{c_0, c_1\}$ в нулевую точку за конечное время $\hat{t}^*$.

Для этого введем в рассмотрение координату рассогласования траекторий движения цели и снаряда-перехватчика

$$\varepsilon(t) = y^*(t) - y(t) \tag{4}$$

откуда, с учетом уравнеий (1) и (2), получаем следующее уравнение для координаты отклонения $\varepsilon(t)$, а именно:

$$\ddot{\varepsilon} + \alpha_1.\dot{\varepsilon} = -\beta_0.u + \alpha_1.c_1 \tag{5}$$

при чем

$$\varepsilon(0) = c_0, \quad \dot{\varepsilon}(0) = c_1. \tag{6}$$

С помощью постановок $\varepsilon = e_1$, $\dot{\varepsilon} = e_2$ получим матаматическую модель в пространстве состояний вида

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_0 \end{bmatrix} .u + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_1.c_1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} e_1(0) \\ e_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Продифференцируем уравнения (7), вводя новую переменную

$$\dot{u} = v \tag{9}$$

тогда получим

$$\begin{bmatrix}\dot e_1\\ \dot e_2\\ \dot e_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&-\alpha_1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\\beta_0\end{bmatrix}.v \tag{10}$$

Для системы (10) сформулируем задачу аналитического конструирования и для ее решения воспользуемся методом предложенном в [2].

Введем оптимизирующий функционал

$$J(v)=\frac{1}{2}.\int_0^{t^*}(\tilde{\mathbf{e}}^T.\mathbf{Q}.\tilde{\mathbf{e}}+g.v^2)dt,\ \ \tilde{\mathbf{e}}^T=\begin{bmatrix}e_1 & e_2 & e_3\end{bmatrix}, \tag{11}$$

где g - произвольно выбираемая весовая положительная константа, в то время как весовая матрица **Q** назначается в форме

$$\mathbf{Q}=\mathbf{q}.\mathbf{q}^T \tag{12}$$

где весовой вектор **q** имеет вид [2]:

$$\mathbf{q}^T=\begin{bmatrix}0 & 1 & \alpha_1^{-1}\end{bmatrix}. \tag{13}$$

Применяя к задаче указанный выше метод, находим

$$v^*(\tilde{\mathbf{e}},t)=\mu(t).g^{-1}.\beta_0.\alpha_1^{-1}.(e_2+\alpha_1^{-1}.e_3) \tag{14}$$

где $$\mu(t)=-\alpha_1.g^{0,5}.\beta_0^{-1}\frac{exp\left[2\beta_0.\alpha_1^{-1}.g^{-0,5}.t\right]-exp\left[2\beta_0.\alpha_1^{-1}.g^{-0,5}.t^*\right]}{exp\left[2\beta_0.\alpha_1^{-1}.g^{-0,5}.t^*\right]+exp\left[2\beta_0.\alpha_1^{-1}.g^{-0,5}.t\right]} \tag{15}$$

Однократное интегрирование закона (14), с учетом (10), даст уравнение управляющего устройства

$$u^*(\mathbf{e},t)=g^{-1}.\beta_0.\alpha_1^{-1}.\mu(t).e_1+g^{-1}.\beta_0.\alpha_1^{-1}.\mu(t).e_2+c\ , \tag{16}$$

где $$c=\beta_0^{-1}.\alpha_1.c_1 \tag{17}$$

Очевидно, соответствующим назначением весовой константы g квадратичного функционала, можно добиться удовлетворения условия (3) в любой момент времени функционирования замкнутой системы. Если однако, весовой коэффициент g принимает значения на интервале (0,1], то при некоторой совокупности начальных условий, рулевая установка может быть доведена до упора. При этом, с нарастанием времени функционирования системы, неравенство (3) становится строгим.

Тем самым алгоритм управления можно представить следующим образом:

$$u^*(\mathbf{e},t)=sat\left[g^{-1}.\beta_0.\alpha_1^{-1}.\mu(t).e_1+g^{-1}.\beta_0.\alpha_1^{-1}.\mu(t).e_2+c\right] \tag{18}$$

где $$sat(\theta)=\begin{cases}\theta, & |\theta|<1;\\ sign(\theta), & |\theta|\ge 1.\end{cases}$$

С помощью невырожденных преобразований [3], можно представить систему (10) следующим образом

$$\begin{bmatrix}\dot e_1\\ \dot e_2\\ \dot s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-\alpha_1&\alpha_1\\0&0&0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\\beta_0.\alpha_1^{-1}\end{bmatrix}.v, \tag{19}$$

где $$s(t)=\mathbf{q}^T.\widetilde{\mathbf{e}}(t) \tag{20}$$

Тогда (14) запишется как следует

$$v^*(s,t)=\mu(t).g^{-1}.\beta_0.\alpha_1^{-1}.s(t) \tag{21}$$

и последнее из уравнений (19) примет, после замыкания системы (19) управлением (21), следующий вид:

$$\dot{s}=-\mu(t).g^{-1}.\beta_0^2.\alpha_1^{-2}.s(t) \tag{22}$$

Тем самым, конечное состояние *s(t),* при известном фиксированном *t*, может быть прогнозировано с помощью выражения

$$s(t)=\left[exp\left(-g^{-1}.\beta_0^2.\alpha_1^{-2}.\int_0^t \mu(\lambda)d\lambda\right)\right].s(0)\ . \tag{23}$$

Значение конечного времени $t^*=\hat{t}^*$ для поражения цели определим, исходдя с необходимостью из требования

$$\varepsilon(\hat{t}^*)=0 \tag{24}$$

Для этого запишем решение укороченной системы уравнений

$$\begin{bmatrix}\dot{e}_1\\ \dot{e}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\alpha_1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}e_1\\ e_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \alpha_1\end{bmatrix}.s(t) \tag{25}$$

как следует:

$$\begin{bmatrix}e_1(t)\\ e_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_1(0)+\alpha_1^{-1}.e_2(0)-\alpha_1^{-1}.e_2(0).e^{-\alpha_1.t}\\ e_2(0).e^{-\alpha_1.t}\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}1-e^{-\alpha_1(t-\tau)}\\ \alpha_1.e^{-\alpha_1(t-\tau)}\end{bmatrix}.s(\tau)d(\tau)\ . \tag{26}$$

Учитывая, что $e_1(\hat{t}^*)=0$, из первого решения (26) получим

$$e_1(0)+\alpha_1^{-1}.e_2(0)-\alpha_1^{-1}.e_2(0).e^{-\alpha_1.\hat{t}^*}=-\int_0^{\hat{t}^*}\left[1-e^{-\alpha_1.(\hat{t}^*-\tau)}\right].s(\tau)d\tau\ . \tag{27}$$

Разрешая (27) относительно неизвестного момента времени $\hat{t}^*$, замкнем решение задачи оптимального перехвата движущейся цели за конечное время $\hat{t}^*$.

Литература

[1]. Н.М. Александровский, Элементы теории оптимальных систем автоматического управления, "Энергия", Москва, 1969.

[2]. Л.Н. Сотиров, Решение одной задачи аналитического конструирования оптимальных регуляторов состояния линейных стационарных объектов с ограниченным временем функционирования, Юбилейна научна конференция на ВНВМУ "Н.Й.Вапцаров",Варна, XI.1981,

[3]. Л.Н. Сотиров, Синтез иерархических оптомальных управляющих структур стационарных динамических систем, The 4-th International conferenca on Control systems and Computer Science, Bucharest, Romania, june 1981.