

ПОСТРОЕНИЕ САОПТИМИЗИРУЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ СРЕДСТВАМИ АНАЛОГОВОЙ ТЕХНИКИ

Е.А. Башков
Д.С. Тянев

1. Постановка задачи линейного быстрогодействия

Решается задача оптимального по быстродействию управления системой

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \quad (1)$$

где x - n -мерный вектор координат системы в n -мерном фазовом пространстве;
 u - m -мерный вектор координат управления, принимающий значения в m -мерном единичном кубе U , заданном неравенствами $|u_j| \leq 1$;

A , B - матрицы с постоянными коэффициентами, размерности (n,n) и (n,m) соответственно.

Задача заключается в том, чтобы выбрать допустимое (в каждый момент времени принадлежащее кубу U) управление $u(t)$, которое переведет систему из начального состояния $x(0)=\xi$ в начало координат Θ за минимальное время. При решении задачи предполагается, что система (1) удовлетворяет условию общности положения [1] и существует допустимое управление $\bar{u}(t)$, переводящее систему из ξ в Θ за конечное время \bar{t} .

2. Методика решения

Известно, что решение уравнения (1) можно записать в виде [2]

$$x(t) = \Phi(t) \cdot \left[\xi + \int_0^t \Phi^{-1}(\tau) \cdot B \cdot u(\tau) d\tau \right] \quad (2)$$

где $\Phi(t)$ - нормированная фундаментальная матрица решений однородной части системы (1).
При $t = \bar{t}$ и управлении $\bar{u}(t)$ имеем

$$\Theta = \xi + \int_0^{\bar{t}} \Phi^{-1}(\tau) \cdot B \cdot \bar{u}(\tau) d\tau .$$

Введем в рассмотрение множество

$$R(t) = \left\{ r(t) = \xi + \int_0^t \Phi^{-1}(\tau) \cdot B \cdot u(\tau) d\tau \mid u(\tau) - \text{допустимое} \right\}$$

которое, как известно, имеет следующие свойства:

1. $R(t)$ при любом t ограничено, замкнуто и строго выпукло;
2. $R(0) = \{\xi\}$, $R(\bar{t}) \ni \Theta$;
3. $R(t_1) \subset R(t_2)$, при $t_1 < t_2$.

Проведем из точки Θ какой-либо вектор p , удовлетворяющий условиям

$$\langle p, \xi \rangle \geq 0, \quad \|p\| = 1 \quad (3)$$

Найдем управление $\hat{u}(t)$, которое определяет в множестве $R(t)$ точку $\hat{r}(t)$, дающую минимальную проекцию на вектор p :

$$\langle \mathbf{p}, \hat{\mathbf{r}}(t) \rangle = \min_u \left[\langle \mathbf{p}, \xi \rangle + \int_0^t \langle \mathbf{B}^T \cdot (\Phi^{-1}(\tau))^T \cdot \mathbf{p}, \mathbf{u}(\tau) \rangle d\tau \right] \quad (4)$$

Запишем систему дифференциальных уравнений, сопряженную с (1):

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\mathbf{A}^T \cdot \boldsymbol{\psi} \quad (5)$$

где $\boldsymbol{\psi}$ - n -мерный вектор. Решение (5) имеет вид

$$\boldsymbol{\psi}(t) = (\Phi^{-1})^T \cdot \boldsymbol{\psi}(0) \quad (6)$$

где $\boldsymbol{\psi}(0)$ - вектор начальных условий системы (5). Пологая $\boldsymbol{\psi}(0) = \mathbf{p}$ и учитывая (6), выражение (4) можно записать в виде

$$\langle \mathbf{p}, \hat{\mathbf{r}}(t) \rangle = \min_u \left[\langle \mathbf{p}, \xi \rangle + \int_0^t \langle \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\psi}(\tau), \mathbf{u}(\tau) \rangle d\tau \right] \quad (7)$$

Очевидно для минимальности (7), должно быть минимально в любой момент времени подинтегральное выражение $\langle \cdot, \cdot \rangle$, что с учетом ограничений на вектор \mathbf{u} , дает

$$\hat{u}_j(t) = -\text{sign} \left[\sum_{i=1}^n b_{ji}^T \cdot \psi_i(t) \right] \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), получим

$$\langle \mathbf{p}, \hat{\mathbf{r}}(t) \rangle = \langle \mathbf{p}, \xi \rangle - \int_0^t \sum_{j=1}^m \left| \sum_{i=1}^n b_{ji}^T \cdot \psi_i(\tau) \right| d\tau$$

Обозначим:

$$\langle \mathbf{p}, \hat{\mathbf{r}}(t) \rangle = f(t, \mathbf{p}) \quad (9)$$

Легко показать, что $f(t, \mathbf{p})$ непрерывна по t и \mathbf{p} , строго монотонно убывает по t (так как выполняется условие общности положения). Поскольку $f(0, \mathbf{p}) \geq 0$, $f(\bar{t}, \mathbf{p}) \leq 0$, функция $f(t, \mathbf{p})$ имеет единственный корень по t , являющийся функцией от \mathbf{p} . Обозначим его через $F(\mathbf{p})$:

$$f(F(\mathbf{p}), \mathbf{p}) = 0 \quad (10)$$

Учитывая вид функции $f(t, \mathbf{p})$, ясно, что $F(\mathbf{p})$ не зависит от длины вектора \mathbf{p} , поэтому $\|\mathbf{p}\|$ можно брать любой, отличной от нуля.

Опираясь на свойства множества $R(t)$ и теорему об отделимости выпуклых замкнутых множеств, логко показать, что время оптимального быстрогодействия T^0 и вектор \mathbf{p}^0 связаны соотношением

$$T^0 = F(\mathbf{p}^0) = \max_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}) \quad (11)$$

3. Решение задачи средствами аналоговой техники

Как отмечено выше, решение задачи можно свести к определению максимума функции $F(\mathbf{p})$, которая зависит от n переменных. Поиск максимума легко реализовать при помощи автоматического оптимизатора машины **ЭМУ-10**, который позволяет определять экстремумы функций, зависящих не более чем от 7 переменных, методом скорейшего спуска или градиента. Работа оптимизатора подробно описана в [3].

Решение дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} f(t, \mathbf{p}) = - \sum_{j=1}^m \left| \sum_{i=1}^n b_{ji}^T \cdot \psi_i(t) \right| \quad (12)$$

с начальными условиями $f(0, \mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}, \xi \rangle$ есть функция $f(t, \mathbf{p})$, корень которой (т.е. время, требуемое для обращения $f(t, \mathbf{p})$ в нуль) и есть по (10) $F(\mathbf{p})$. Таким образом, определение $F(\mathbf{p})$ также легко реализуется на аналоговой машине.

Общая блок-схема решения задачи представлена на рис. 1, где двойными стрелками показаны векторные связи, одинарными - скалярные, пунктирными - управляющие. Блоки 1 и 4 предназначены для решения систем дифференциальных уравнений (5) и (1) соответственно. В блоке 2 определяются компоненты вектора

$$\beta = \mathbf{B}^T \cdot \psi(t)$$

по которым в блоке 3 определяется вектор $\mathbf{u}(t)$, и в блоке 5 решается дифференциальное уравнение (12). Начальные условия для уравнения (12) вырабатываются в блоке 7. Когда $f(t, \mathbf{p}) = 0$, срабатывает индикатор нуля (ИН-1, блок 6) и посылается сигнал на останов решения всех дифференциальных уравнений. За это время в блоке 8 (блок времени) вырабатывается напряжение, пропорциональное $F(\mathbf{p})$, которое в качестве максимизируемой функции от поданных компонентов вектора \mathbf{p} , поступает в автоматический оптимизатор. Блоки 9 и 10 предназначены для образования управляющего сигнала при достижении системой (1) с установленной точностью начала координат. Все переключения режимов работы осуществляются блоком управления.

4. Экспериментальные результаты

Выше описанная методика была проверена на нескольких задачах, имеющих аналитическое решение. Нужно отметить, что количество переменных, от которых зависит максимизируемая функция $F(\mathbf{p})$ уменьшалось на 1, исходя из следующих соображений: если, в качестве нормы вектора \mathbf{p} выбрать

$$\|\mathbf{p}\| = \max(|p_1|, \dots, |p_n|)$$

то при постоянном ξ можно зафиксировать одну из компонент вектора \mathbf{p} равной ± 1 , но так, чтобы за счет других компонент можно было выполнить условие (3). Например, при начальных условиях вида

$$\begin{aligned} \zeta_i &= 0, & i &\neq j, \\ \zeta_i &= \text{const}, & i &= j, & i = \overline{1, n} \end{aligned}$$

можно j -тую компоненту вектора \mathbf{p} выбрать равной $\text{sign } \zeta_j$.

В качестве примера приведем решение задачи управления гармоническим осциллятором при помощи входных переменных (аналитическое решение дано в [2]). Система дифференциальных уравнений, описывающих движение осциллятора, имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} |u_1| \leq 1, \\ |u_2| \leq 1. \end{cases}$$

Вектор начальных условий был выбран следующим

$$\xi = \begin{bmatrix} 4,5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Сопряженная система по (5) и вектор управления по (8) запишутся так:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} u_1 = -\text{sign} \psi_1, \\ u_2 = -\text{sign} \psi_2. \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение (12) принимает вид

$$\frac{d}{dt} f(t, \mathbf{p}) = -[|\psi_1| + |\psi_2|]$$

В этой задаче фиксировалась первая компонента вектора, которая выбиралась равной 1. Тогда $f(0, p) = \xi_1 = +4,5$.

Задача решалась при начальном приближении $p_{20} = 0,375$. Семейство траекторий движения изображающей точки при решении задачи показано на рисунке 2. Были получены следующие значения: $p_2^0 = 0,05, T^0 = 3,5$ [сек.].

Результаты, полученные при решении всех задач, хорошо согласуются с теоретическим решением.

5. Метод построения самонастраивающейся системы оптимального управления

Задачу оптимального управления объектом

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (13)$$

в смысле минимума какого-либо критерия качества

$$I = \int_0^t f_0(x, u) dt$$

можно разделить на два этапа:

- 1) отыскание оптимального управления;
- 2) построение системы оптимального управления объектом.

Оптимальное управление может быть найдено в двух формах: как функция координат объекта (13) (синтезирующая функция) $u(x)$ и как функция времени $u(t)$.

Для второго этапа наиболее удобным является определение оптимального управления в виде синтезирующей функции, но нахождение ее связано с определенными трудностями и для большинства задач этот вопрос не решен. Легче решается вопрос отыскания оптимального управления в виде $u(t)$, но в этом случае известную трудность представляет второй этап задачи. Определяя $u(t)$ для какого-либо $x(0)$ заранее, а затем вводя это управление в объект, мы не можем гарантировать, что процесс в объекте будет оптимальным, так как любое отклонение от оптимальной траектории, вызванное любыми причинами, делает найденное управление не оптимальным.

В [4] описан метод построения системы оптимального управления, сочетающий в себе определение управления как функции времени и как функции координат объекта. Сущность этого метода состоит в следующем. Пусть на каком-либо вычислительном устройстве реализован быстрый итерационный процесс определения $u(t)$ (каждая итерация длится время τ) и полученное управление вводится в медленно движущийся объект. Понятно, что если за время τ координаты x объекта изменяются мало (объект квазистационарен по отношению к вычислительному устройству), управление объектом будет почти оптимальным, причем при любом отклонении $x(t)$ от желаемой траектории, будет достаточно быстро найдено новое управление и дальнейшее движение объекта также будет оптимальным.

Нужно отметить, что определение необходимой величины τ , при которой выполняется условие квазистационарности объекта, аналитическим путем весьма затруднительно, но ее можно определить экспериментально, моделируя всю систему "вычислительное устройство - объект" на вычислительных машинах.

6. Моделирование самонастраивающейся оптимальной по быстродействию системы управления

Вышеописанный метод оптимального управления объектом был опробован на задаче оптимального по быстродействию управления гармоническим осциллятором с одним управляющим воздействием, дифференциальные уравнения которого имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u, \quad |u| \leq 1. \end{aligned}$$

с начальными условиями $x_1(0) = 1,5$; $x_2(0) = 0,5$.

Для определения $u(t)$ по изменяющимся во времени координатам объекта ("медленной" модели) $x^M(t)$ применялся итерационный процесс, рассмотренный в разд. 2, 3. Блок-схема модели приведена на рис. 3. По сути дела модель вычислительного устройства полностью включает в себя блок-схему рис. 1 со следующими дополнениями.

1. Для определения $u(t)$ существенна не длина вектора p , а его направление. Максимизация $F(p)$ производилась по

$$v^B = \text{arctg} p_2^B / p_1^B$$

и соответственно p_1^B и p_2^B находились по формулам

$$p_1^B = \cos v^B, \quad p_2^B = \sin v^B$$

где индексы B означают, что переменные относятся к быстрым моделям.

2. Так как в любой момент времени необходимо, чтобы

$$\langle p^B, x^M(t) \rangle \geq 0 \quad (14)$$

было предусмотрено автоматическое изменение p^B . При невыполнении условия (14) индикатор И1 посылает сигнал, v^B изменяется по формуле

$$v^B = \begin{cases} v^B + \pi / 2, & v^B < 0; \\ v^B - \pi / 2, & v^B > 0. \end{cases}$$

3. В связи с тем, что заранее невозможно предсказать диапазон изменения v^B , при поиске оптимального значения, было предусмотрено автоматическое возвращение v^B в пределы $||v|| \leq 2\pi$ (блок И2) сдвигом на 2π в соответствующую сторону.

4. На каждой итерации полученное улучшенное значение p^B вводилось в "медленную" сопряженную систему в качестве начальных условий. По решению этой системы и определялось "медленное" управление

$$u^M(t) = -\text{sign} \psi_2^M(t)$$

Полученное управление вводилось в модель объекта, текущие координаты которого $x^M(t)$ поступали в "быструю" модель как начальные условия и подавались в блок определения $\langle p, x \rangle$. Для "быстрой" системы был выбран масштаб по времени $M_t^B = 50$, а M_t^M для "медленной" системы подбирался экспериментально. Время τ (одна итерация) состоит из двух частей: $t1$ - время на решение уравнений (1), (9), (12) в убыстренном темпе и $t2$ - время на работу оптимизатора и переключения в модели вычислительного устройства.

При решении задачи $\tau \approx 10$ сек., причем $t1 \leq 0,2$ сек., т.е. при данной аппаратуре (**ЭМУ-10**) дальнейшее увеличение M_t^B не приводит к существенному уменьшению τ . При неизменных x^M (объект не включался) определение $u(t)$ требовало подядка 9 - 11 итераций (90 - 110 сек.).

При таких показателях вычислительного устройства было найдено, что M_t^M не должно превышать 0,001, в противном случае объект не приходит в начало координат, т.е. не выполняется условие квазистационарности. На рис. 4 показаны траектории движения избирающей точки. Нужно отметить, что идеального совпадения "медленной" и "быстрой" модели добиться практически невозможно (неточность установки коэффициентов, дрейф нуля интеграторов "медленной системы" и т.д.), т.е. при напереднайденном оптимальном

управлении движение объекта не будет оптимально (см. кривую 1, рис. 4). Кривая 2 показывает траекторию объекта при поиске оптимального управления в процессе движения, при этом объект приходит в заданную точку и траектория движения почти совпадает с оптимальной (пунктирная кривая). На рис. 5 показано движение объекта при наличии ступенчатых возмущений, вычислительное устройство приводит объект в начало координат по кривой, состоящей из соответствующих оптимальных траекторий.

Изложенная итерационная процедура определения оптимального по быстродействию управления реализует идеи, сходные с методом поворота опорных плоскостей и естественно распространяется на объекты, движение которых описывается линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами и в некоторых случаях на нелинейные системы [5]. Соответственно и техника поиска оптимальных управлений на аналоговых вычислительных машинах (с необходимыми дополнениями) может быть использована для этих систем. Эти же задачи можно решать подобным способом и на аналого-цифровых комплексах. Причем если в состав АЦК входит быстродействующая итеративная АВМ, то резко сократится время одной итерации, что позволит строить самонастраивающиеся системы для более быстрых объектов.

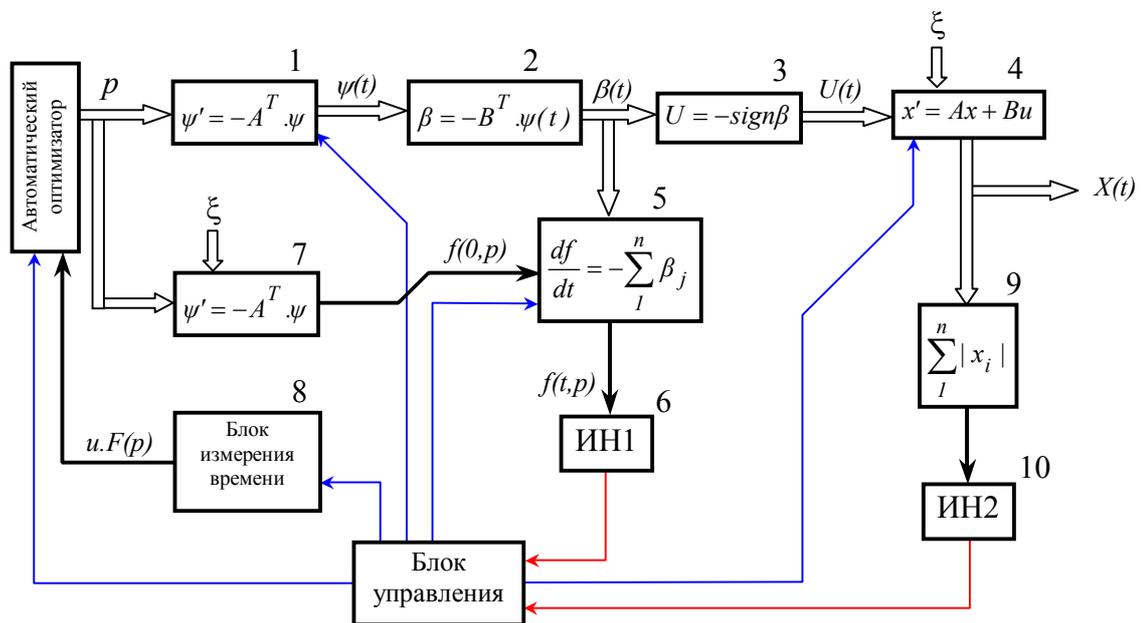


Рис. 1

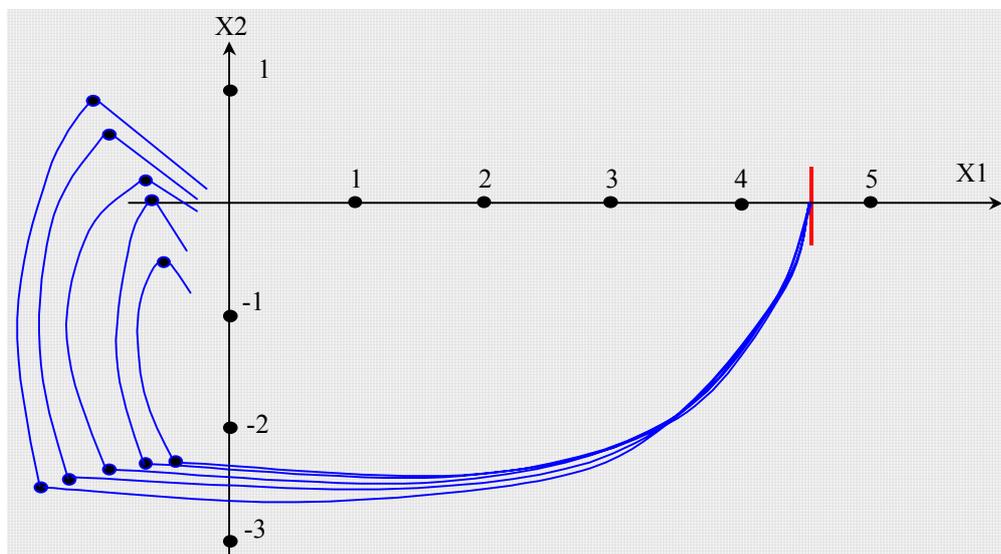


Рис. 2

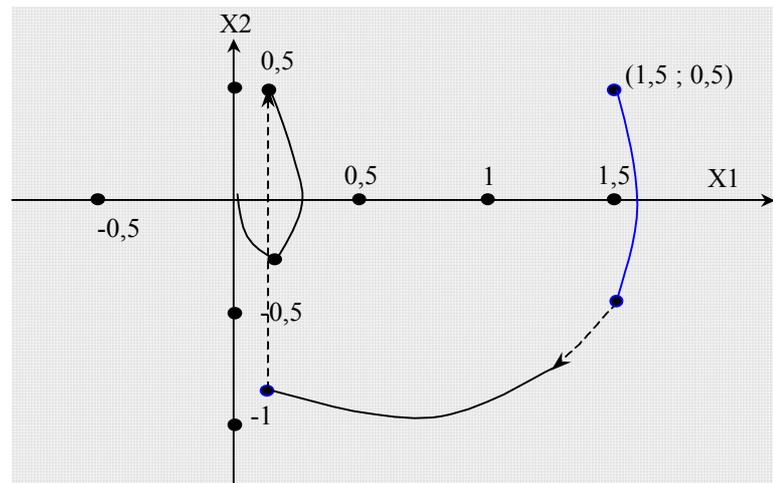


Рис. 5

Литература

- [1]. Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкредидзе, Е.Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Издательство "Наука", Москва, 1969.
- [2]. М. Атанс, П. Фалб, Оптимальное управление, Издательство "Машиностроение", Москва, 1968.
- [3]. А.А. Фельдбаум, Вычислительные устройства в автоматических системах, Физматгиз, Москва, 1959.
- [4]. В.Г. Болтянский, Математические методы оптимального управления, Издательство "Наука", Москва, 1974.
- [5]. В.Е. Шаманский, Методы численного решения краевых задач, Издательство "Наукова думка", Киев, 1976.