РЕГУЛИРАНЕ НА ИЗХОДА НА МНОГОМЕРНИ СИСТЕМИ ЗА АВТОМАТИЧНО УПРАВЛЕНИЕ

Сотиров Л. Н., Тянев Д. С., Димитров В. С.

Ще разгледаме системата за автоматично управление, представена с уравненията:

(1)
$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{u}(t) \ ,$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}.\boldsymbol{x}(t), \ \ \boldsymbol{x}(0) \neq 0 \ ,$$

където: $\boldsymbol{x}(t)$ е **n-**мерен вектор на състоянието;
$\boldsymbol{u}(t)$ е **r-**мерен вектор на управлението;
$\boldsymbol{y}(t)$ е **p-**мерен вектор на изхода.

Степента на минималния характеристичен полином $\Psi(\lambda)$ на матрицата $\boldsymbol{A}$ ще обозначим с m. Ще приемем че $r \geq p$.

Задачата за регулиране на векторния изход на автоматичната система (1) предполага намирането на управляващо въздействие, което привежда вектора $\boldsymbol{y}(t)$ към момента от време $t{=}T$ в зададено състояние

(2)
$$\boldsymbol{y}(T) = \boldsymbol{K}$$

където $\boldsymbol{K}$ е **p-**мерен вектор, и на такова управляващо въздействие, което би го удържало в това състояние и след указания момент. Това означава, че изобразяващата точка $\boldsymbol{x}(0)$ се привежда в момента от време $t{=}T$ на (**n-p**)**-**мерната хиперплоскост Ω в **n-**мерното пространство на състоянията, определена от пресичането на (**n-1**)**-**мерните хиперплоскости Ω1, Ω2, ... Ωp. зададени с уравнението

(3)
$$\sigma = \boldsymbol{C}.\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{K} = 0 \ ,$$

при което от $\boldsymbol{x}(T) \in \Omega$ следва $\boldsymbol{x}(t) \in \Omega$ при всички $t > T$.

При такава интерпретация на постановката на задачата трябва така да се формира управляващият вектор $\boldsymbol{u}(t)$, че да се изпълнява съотношението

(4)
$$\dot{\sigma} = \boldsymbol{C}.\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\Lambda}.(\boldsymbol{C}.\boldsymbol{x} - \boldsymbol{K}) \ .$$

където:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{p1} & \lambda_{p2} & \cdots & \lambda_{pp} \end{bmatrix}$$

е произволна постоянна матрица, което гарантира изпълнението на второто от сформулираните условия. По този начин ще получим

(5)
$$\boldsymbol{C}.(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{C}.\boldsymbol{A}.\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}.\boldsymbol{B}.\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Lambda}.(\boldsymbol{C}.\boldsymbol{x} - \boldsymbol{K}) \ .$$

Въвеждайки в (5) обозначенията:

$$\boldsymbol{C}.\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{*}; \qquad \bar{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_p \end{bmatrix}; \qquad \bar{\bar{\boldsymbol{u}}} = \begin{bmatrix} u_{p+1} \\ \cdots \\ u_r \end{bmatrix};$$

(6)
$$\overline{C^*} = \begin{bmatrix} \overset{*}{c}_{11} & \cdots & \overset{*}{c}_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overset{*}{c}_{p1} & \cdots & \overset{*}{c}_{pp} \end{bmatrix} \quad ; \qquad \overline{\overline{C^*}} = \begin{bmatrix} \overset{*}{c}_{1,p+1} & \cdots & \overset{*}{c}_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overset{*}{c}_{p,p+1} & \cdots & \overset{*}{c}_{pr} \end{bmatrix}$$

ще представим произведението $C^*.u$ както следва

(7)
$$\begin{bmatrix} \overline{C^*} & \overline{\overline{C^*}} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \overline{u} \\ \overline{\overline{u}} \end{bmatrix} = C^*.u \quad .$$

Като се възползуваме от първия управляващ субвектор може да запишем

(8)
$$\overline{C^*}.\overline{u} = \Lambda.(C.x - K) - C.A.x - \overline{\overline{C^*}}.\overline{\overline{u}}$$

откъдето предполагайки, че

(9)
$$|\overline{C^*}| \neq 0$$

ще получим търсеното управление от вида:

(10)
$$\overline{u} = \overline{C^*}^{-1} . \left[\Lambda.(C.x - K) - C.A.x - \overline{\overline{C^*}}.\overline{\overline{u}} \right] \quad .$$

След това ще преобразуваме първото векторно-матрично уравнение на системата (1) както следва

(11)
$$\begin{bmatrix} \dot{\overline{x}} \\ \cdots \\ \dot{\overline{\overline{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{21} & \vdots & A_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \cdots \\ \overline{\overline{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & \vdots & B_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{21} & \vdots & B_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \overline{u} \\ \cdots \\ \overline{\overline{u}} \end{bmatrix}$$

където

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \quad , \qquad \overline{\overline{x}} = \begin{bmatrix} x_{p+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad ,$$

а субматриците са с размерности, съответно

A_{11}	–	(p,p)	B_{11}	–	(p,p)
A_{12}	–	$(p,n-p)$	B_{12}	–	$(p,r-p)$
A_{21}	–	$(n-p,p)$	B_{21}	–	$(n-p,p)$
A_{22}	–	$(n-p,n-p)$	B_{22}	–	$(n-p,r-p)$

Това дава възможност да запишем уравненията

$$\dot{\overline{x}} = A_{11}.\overline{x} + A_{12}.\overline{\overline{x}} + B_{11}.\overline{C^*}^{-1}.\left[\Lambda.(C.x - K) - C.A.x\right] + \left(-B_{11}.\overline{C^*}^{-1}.\overline{\overline{C^*}} + B_{12} \right).\overline{\overline{u}} \quad ,$$

(12)
$$\dot{\overline{\overline{x}}} = A_{21}.\overline{x} + A_{22}.\overline{\overline{x}} + B_{21}.\overline{C^*}^{-1}.\left[\Lambda.(C.x - K) - C.A.x\right] + \left(-B_{21}.\overline{C^*}^{-1}.\overline{\overline{C^*}} + B_{22} \right).\overline{\overline{u}} \quad .$$

Субвекторът $\overset{=}{\boldsymbol{u}}$ може да се синтезира така, че да се оптимизира движението по (**n-p**)-мерната хиперплоскост [2]. За целта може да се формира функционал от вида:

$$J_1\left(\overset{=}{\boldsymbol{u}}\right) = \int_0^{t^*} \left(\left[\overset{-}{\boldsymbol{x}}^T \overset{=}{\boldsymbol{x}}^T \right] . \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{Q}2 \end{bmatrix} + \overset{=}{\boldsymbol{u}}^T .\boldsymbol{G}.\overset{=}{\boldsymbol{u}} \right) dt \tag{13}$$

или функционал от вида [3]:

$$J_2\left(\overset{=}{\boldsymbol{u}}\right) = \int_0^{t^*} \left(\sigma^T .\boldsymbol{Q}.\sigma + \overset{=}{\boldsymbol{u}}^T .\boldsymbol{G}.\overset{=}{\boldsymbol{u}} \right) dt \;. \tag{14}$$

Едно от възможните управления, гарантиращи изпълнението на условие (2) е следното [1]:

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{B}^T .\boldsymbol{\Phi}^T (T-t).\boldsymbol{C}^T .\boldsymbol{\Psi}^{-1} . \left[\boldsymbol{C}.\boldsymbol{\Phi}^T (T).\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{K} \right] \tag{15}$$

където:

$$\boldsymbol{\Psi} = \int_0^T \boldsymbol{C}.\boldsymbol{\Phi}(T-\tau).\boldsymbol{B}.\boldsymbol{B}^T .\boldsymbol{\Phi}^T (T-\tau).\boldsymbol{C}^T \, d\tau$$

е квадратна матрица с размери *(p,p)*. Това може да се докаже по следния начин: съотношението (2) може да се запише както следва:

$$\boldsymbol{C}.\int_0^T \boldsymbol{\Phi}(T-\tau).\boldsymbol{B}.\boldsymbol{u}(\tau)\, d\tau \;\; = \;\; -\boldsymbol{C}.\boldsymbol{\Phi}(T).\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{K} \tag{16}$$

и след като заместим с (15) ще получим

$$-\int_0^T \boldsymbol{C}.\boldsymbol{\Phi}(T-\tau).\boldsymbol{B}.\boldsymbol{B}^T .\boldsymbol{\Phi}^T (T-\tau).\boldsymbol{C}^T \, d\tau.\boldsymbol{\Psi}^{-1} \left[\boldsymbol{C}.\boldsymbol{\Phi}(T) - \boldsymbol{K} \right] = \boldsymbol{C}.\boldsymbol{\Phi}(T).\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{K} \;. \tag{17}$$

Ако рангът на матрицата

$$\boldsymbol{Q} = \left[\boldsymbol{C.B} \;\vdots\; \boldsymbol{C.A.B} \;\vdots\; \boldsymbol{C.A}^2 \boldsymbol{.B} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \boldsymbol{C.A}^{m-1} \boldsymbol{.B} \right] \tag{18}$$

е равен на p, може да се покаже,че Ψ е положително определена матрица и следователно съществува нейната обратна матрица.

Литература

[1]. Я. Н. Ройтенберг, Автоматическое упревление, Москва, "Наука", 1971.

[2]. А. С. Галиуллин, И.А. Мухамедзянов, Р.Г. Мухарлямов, В.Д. Фурасов, Построение систем програмного движения, Москва, "Наука", 1971.

[3]. Л. Н. Сотиров, Метод сингулярных функций в одном классе задач аналитического конструирования оптимальных систем, Автореферат дисертации, Ленинград, 1974.